

Thüringer CAS-Projekt

Thema

Ralph Huste

Sek I Sek II ClassPad™ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte:

Unterrichtsmaterial:

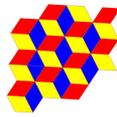


Aufgabe

Nutzen der TI- Nspire CAS- Anwendungen zum Bearbeiten von typischen Problemstellungen der Analysis hier am Beispiel einer einfachen ganzrationalen Funktion 4. Grades:

- Elemente einer Kurvenuntersuchung
- Flächenberechnungen
- Tangentengleichungen
- Schnittwinkel





Thüringer CAS-Projekt

Vorschlag zur Umsetzung:

Öffnen Sie eine neue Applikation Calculator

Funktionsdefinition

$$x^4 - 5x^2 + 4 \quad \text{ctrl} \quad \text{sto} \quad \text{var} \quad f(x)$$

Visualisierung mit Applikation Graphs

Definitions- und Wertebereich
der Definitionsbereich einer ganzrationalen
Funktion ist $x \in \mathbb{R}$

der Wertebereich wird nach der Untersuchung
auf Extrempunkte angegeben

Untersuchen Sie den Graphen auf
Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
Schnittpunkte mit der x- Achse: $f(x) = 0$

Schnittpunkt mit der y- Achse: $x = 0$

(Bem.: die Rechnung im TI für P_y ist nur exemplarisch; die Schüler
sollten hier die Koordinaten händisch bestimmen)

$$P_x (\pm 1; 0), P_x (\pm 2; 0)$$

$$P_y (0; 4)$$

Symmetriebetrachtungen

Vermutung Achsensymmetrie bzgl. der
y- Achse

$$f(x) = f(-x)$$

Angabe der Gleichung $f(-x)$ und Vergleich mit
der Funktionsgleichung $f(x)$

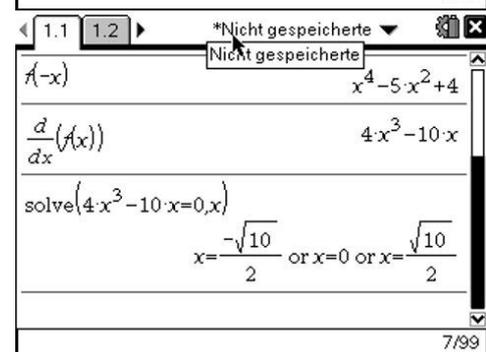
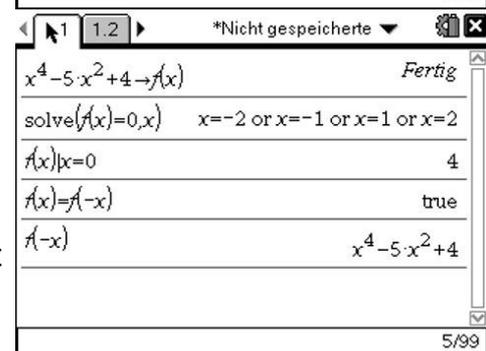
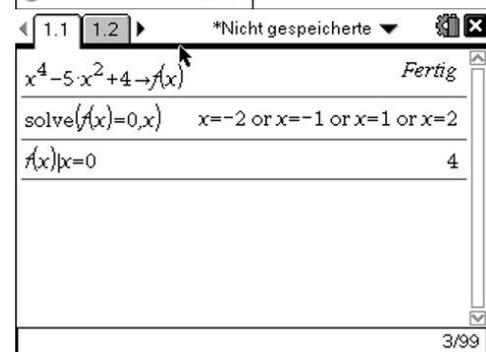
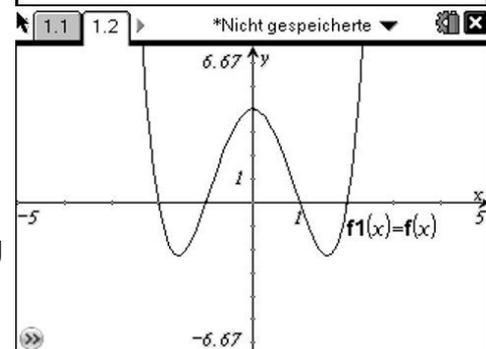
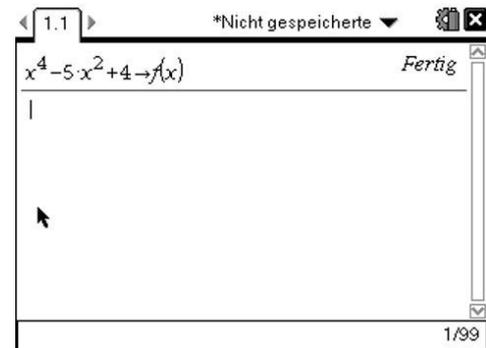
Untersuchung auf lokale Extrempunkte

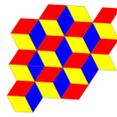
notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 4x^3 - 10x$$

$$x_E = \pm \frac{1}{2} \sqrt{10} \wedge x_E = 0$$

mögliche Extremstellen





Thüringer CAS-Projekt

hinreichende Bedingung: $f'(x) \neq 0$

$$f'(x) = 12x^2 - 10$$

$$f'(0) = -10$$

$$f'\left(\pm \frac{1}{2}\sqrt{10}\right) = 20$$

lokales Maximum

jeweils lokales

Minimum

Koordinaten der Extrempunkte

lokale Minima: $P_{\text{Min}}\left(\pm \frac{\sqrt{10}}{2}; -\frac{4}{9}\right)$

lokales Maximum: $P_{\text{Max}}(0; 4)$

Untersuchungen auf Globalität der Extrempunkte

aus $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ folgt, die lokalen Minima sind auch globale Minima

damit ist eine Angabe zum Wertebereich machbar:

$$W_f : y \in \mathbb{R}, y \geq -\frac{9}{4}$$

Untersuchung auf Wendepunkte

notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = 24x$$

$$x_w = \pm \frac{1}{6}\sqrt{30}$$

mögliche Wendestellen

hinreichende Bedingung: $f'''(x) \neq 0$

$$f'''(x) = 24 \cdot x$$

$$f'''(\pm \frac{\sqrt{30}}{6}) = \pm 4 \cdot \sqrt{30} \neq 0$$

Wendestellen liegen vor

1.1 1.2 *Nicht gespeicherte

$f'(x) = 12x^2 - 10$

$\frac{d^2}{dx^2}(f(x)) = 24x$

$12x^2 - 10|x = \left\{ -\frac{\sqrt{10}}{2}, 0, \frac{\sqrt{10}}{2} \right\}$

$\{20, -10, 20\}$

9/99

1.1 1.2 *Nicht gespeicherte

$f(x) = 4x^3 - 10x^2 + 10x - 4$

$\frac{d^2}{dx^2}(f(x)) = 24x$

$12x^2 - 10|x = \left\{ -\frac{\sqrt{10}}{2}, 0, \frac{\sqrt{10}}{2} \right\}$

$\{20, -10, 20\}$

$f(x)|_x = \left\{ -\frac{\sqrt{10}}{2}, 0, \frac{\sqrt{10}}{2} \right\} \quad \left\{ -\frac{9}{4}, 4, -\frac{9}{4} \right\}$

10/99

1.1 1.2 *Nicht gespeicherte

$\{20, -10, 20\}$

$f(x)|_x = \left\{ -\frac{\sqrt{10}}{2}, 0, \frac{\sqrt{10}}{2} \right\} \quad \left\{ -\frac{9}{4}, 4, -\frac{9}{4} \right\}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = \infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = \infty$

|

12/99

1.1 1.2 *Nicht gespeicherte

$f''(x) = 24x$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f''(x)) = \infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f''(x)) = \infty$

$\text{solve}(12x^2 - 10 = 0, x) \quad x = -\frac{\sqrt{30}}{6} \text{ or } x = \frac{\sqrt{30}}{6}$

13/99

1.1 1.2 *Nicht gespeicherte

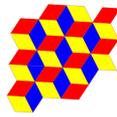
$\text{solve}(12x^2 - 10 = 0, x) \quad x = -\frac{\sqrt{30}}{6} \text{ or } x = \frac{\sqrt{30}}{6}$

$\frac{d^3}{dx^3}(f(x)) = 24x$

$24x|x = \left\{ -\frac{\sqrt{30}}{6}, \frac{\sqrt{30}}{6} \right\} \quad \{-4\sqrt{30}, 4\sqrt{30}\}$

|

15/99



Thüringer CAS-Projekt

Koordinaten der Wendepunkte:

$$P_w \left(\pm \frac{\sqrt{30}}{6}; \frac{19}{36} \right)$$

die meisten dieser Untersuchungen lassen sich in der Applikation Graphs auch näherungsweise numerisch über

menu 6: Graph analysieren

ausführen

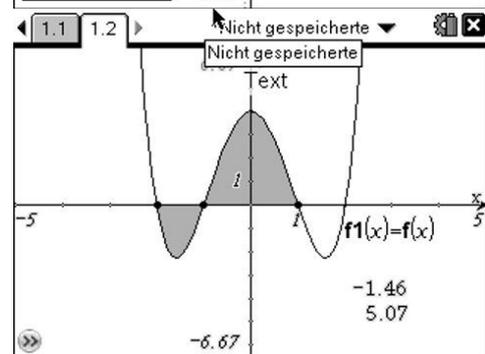
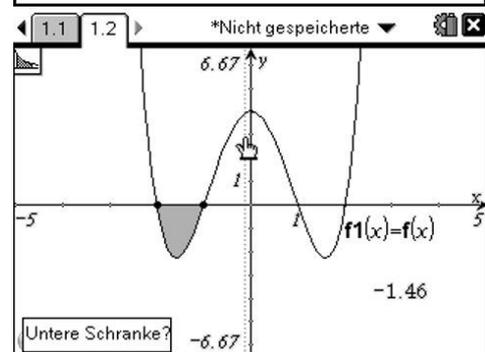
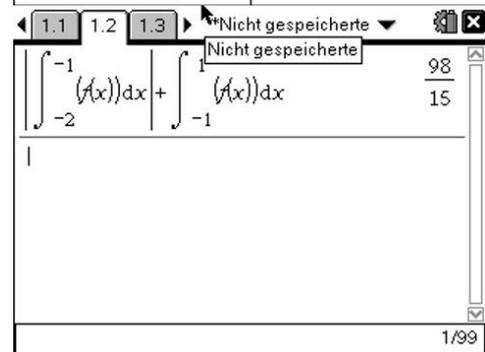
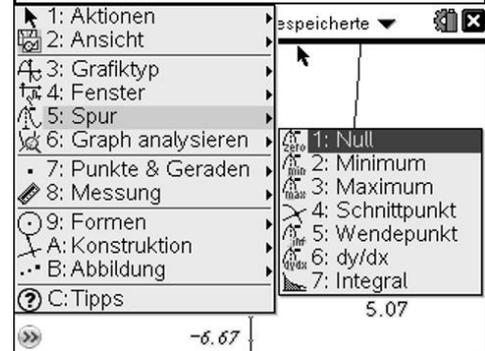
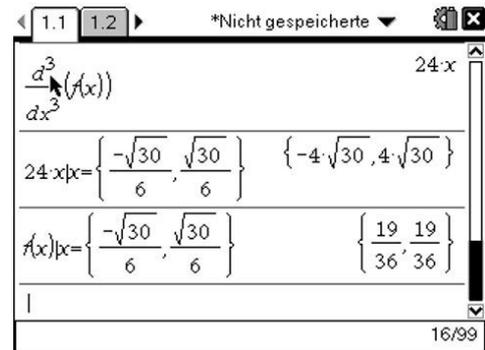
Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen Graphen der Funktion, der x- Achse und den Geraden $x = -2$ und $x = 1$

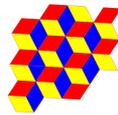
$$A = \left| \int_{-2}^{-1} f(x) dx \right| + \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{98}{15}$$

Bem.: dazu neue Applikation öffnen

In der Applikation Graphs kann das Ganze auch graphisch dargestellt und der Flächeninhalt näherungsweise berechnet werden

menu 6: Graph analysieren
7: Integral





Thüringer CAS-Projekt

Ermitteln Sie jeweils die Gleichungen der Tangenten an den Graphen in $x = -2$ und $x = 1$

Tangentengleichungen:

$$t(x) = m \cdot x + n$$

$$x = -2$$

$$m = f'(-2) = -12$$

$$f(-2) = 0$$

$$0 = -12 \cdot (-2) + n$$

$$t_1(x) = -12 \cdot x - 24$$

$$x = -1$$

$$m = f'(-1) = 6$$

$$f(-1) = 0$$

$$0 = 6 \cdot (-1) + n$$

$$t_2(x) = 6 \cdot x + 6$$

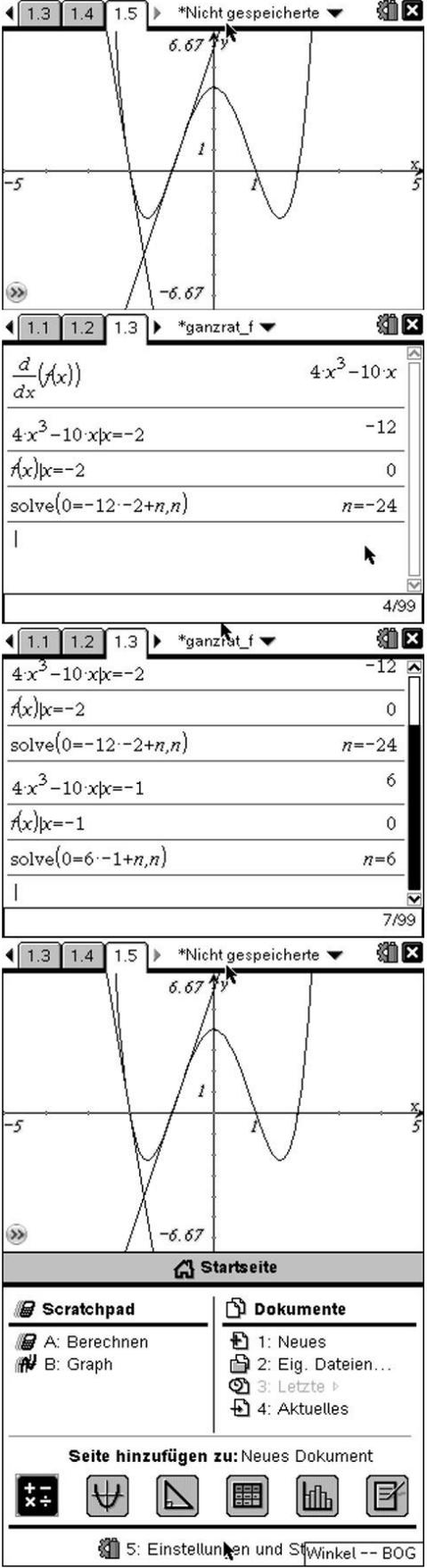
graphische Darstellung

Ermitteln Sie die Größe des Schnittwinkels beider Tangenten

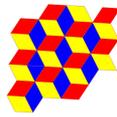
Dazu das Winkelmaß u.U. über

 5: Einstellungen und Status

in Gradmaß ändern



The screenshot shows a CAS calculator interface with three windows. The top window, titled '*Nicht gespeicherte', displays a graph of a cubic function $f(x) = 4x^3 - 10x$ on a coordinate system. The x-axis ranges from -5 to 5, and the y-axis from -5 to 5. The graph has a local maximum at $(-1, 6.67)$ and a local minimum at $(1, -6.67)$. The bottom two windows, both titled '*ganzrat_f', show the calculation of the tangent line at $x = -2$ and $x = -1$. The first window shows the derivative $\frac{d}{dx}(4x^3 - 10x) = 4x^3 - 10x$, the function value at $x = -2$ is 0, and the slope $m = -12$. The second window shows the function value at $x = -1$ is 0, and the slope $m = 6$. The bottom panel of the calculator shows a 'Startseite' button and a list of documents: '1: Neues', '2: Eig. Dateien...', '3: Letzte', and '4: Aktuelles'. The bottom status bar shows '5: Einstellungen und Status' and 'Winkel -- BOG'.



Thüringer CAS-Projekt

aus $\tan \alpha = m_1 = -12$ folgt $\alpha_1 = 94,76^\circ$
aus $\tan \alpha = m_2 = 6$ folgt $\alpha_2 = 80,54^\circ$
d.h. für den Schnittwinkel gilt: $\beta = 14,23^\circ$

näherungsweise lässt sich der Schnittwinkel in der Applikation Graphs bestimmen

dazu zuerst den Schnittpunkt der Tangenten fixieren

- menu 7: Punkte und Geraden
- 3: Schnittpunkt(e)

dann

- menu 8: Messung
- 4: Winkel

Bem.: für die Applikation Graphs muss u. U. über menu 5: Einstellungen und Status die Angabe der Winkleinheit geändert werden

The first screenshot shows the 'Allgemeine Einstellungen' (General Settings) dialog box. The 'Winkel' (Angle) dropdown menu is open, showing options: Grad, Bogenmaß, and Grad. The 'Reell oder Komplex' dropdown is set to 'Neugrad'. Other settings include 'Angezeigte Ziffern: Fließ 6', 'Exponentialformat: Grad', 'Berechnungsmodus: Auto', and 'Vektorformat: Kartesisch'. Buttons for '?', 'Zurücks.', 'Standard', 'OK', and 'Abbruch' are visible.

The second screenshot shows a table of calculations in the CAS interface. The input is $\text{solve}(0=6 \cdot -1+n, n)$ with $n=6$. The results are:

$\tan^{-1}(-12)$	-85.2364
$180-85.236358309274$	94.7636
$\tan^{-1}(6)$	80.5377
$94.763641690726-80.537677791974$	14.226

The third screenshot shows a graphing window with a coordinate system. A parabola $y = x^2 - 6.67x - 4$ is plotted. Two tangent lines are drawn at the points $(-1.67, -4)$ and $(6.67, -4)$. The angle between these two tangents is measured and labeled as 14.2° .

Didaktischer Kommentar:

In diesem Beispiel sollen Möglichkeiten der Bearbeitung von Standardaufgabenstellungen aus dem Bereich der Analysis mittels der Applikationen Calculator und Graphs aufgezeigt werden.

Dazu werden sowohl Berechnungen mit dem CAS als auch das näherungsweise Bestimmen von Lösungen vorgestellt.

Bewusst wurde ein einfacher Funktionsterm gewählt.